Et mathematisk Sted hos Aristoteles.

Af

J. L. Heiberg.

(Meddelt i Mødet den 10de Februar 1888.)

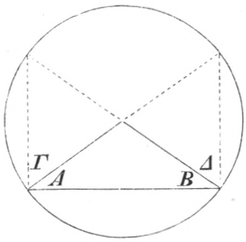
I Analytica priora I cap. 24 (p. 41 b 6 ff. ed. Bekker) udvikler Aristoteles, at der til en Syllogisme kræves almindelige Sætninger, og tilføjer, at det tydeligst ses ved de mathematiske Sætninger (*διαγράμματα*). Dette oplyses saa ved følgende Exempel:

οἷον ὅτι τοῦ ἰσοσκελοῦς ἴσαι αἱ πρὸς τῇ βάσει. ἔστωσαν εἰς τὸ κέντρον ἠγμέναι αἱ Α, Β. εἰ οὖν ἴσην λαμβάνοι τὴν Α, Γ γωνίαν τῇ Β, Δ μὴ ὅλως ἀξιώσας τὰς τῶν ἡμικυκλίων, καὶ πάλιν τὴν Γ τῇ Δ μὴ πᾶσαν προσλαβὼν τὴν τοῦ τμήματος, ἔτι ἀπ' ἴσων οὐσῶν τῶν ὅλων γωνιῶν καὶ ἴσων ἀφῃρημένων ἴσας εἶναι τὰς λοιπὰς τὰς Ε, Ζ, τὸ ἐξ ἀρχῆς αἰτήσεται, ἐὰν μὴ λάβῃ ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσων ἀφαιρουμένων ἴσα λείπεσθαι.

Dette Steds mathematiske Indhold forklares af Waitz (Aristotelis Organon I p. 434 f.) med udtrykkelig Forkastelse ikke blot af Zells Fortolkning, som ganske vist er meget umathematisk, men ogsaa af den gamle, dygtige Commentator[1]) Jul. Pacius', paa følgende Maade:

[1]) I p. 434 hedder det vel «caput rei Jul. Pacius perspexit», men det forkastes, at han har talt om «anguli mixti». Disses Anvendelse er imidlertid netop «caput rei».

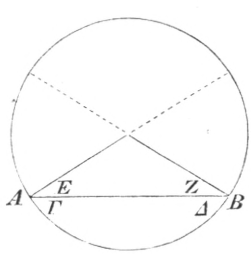
Med den ligebenede Trekants Toppunkt som Centrum beskrives en Cirkel, Benene forlænges til Peripherien, og de to angivne Hjælpelinier drages. Da er $\angle A + \Gamma = \angle B + \Delta$, fordi de begge staa paa en Halvcirkel. Ligeledes er $\angle \Gamma = \angle \Delta$, fordi de staa paa samme Bue. Altsaa ved Subtraction



$$\angle A = \angle B.$$

Denne Forklaring kan imidlertid ikke være rigtig. Der skal ikke lægges videre Vægt paa, at Waitz vil udslette Ordene *τὰς E, Z* p. 41 b 20 (som en Dittographi af det følgende *τὸ ἐξ*, p. 435), da han selv fremhæver, at det ikke er nødvendigt. Men hans Fortolkning strider mod den mathematiske Sprogbrug. Thi $\angle A + \Gamma$ er *γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ*, ikke *γ. τοῦ ἡμικυκλίου*, og ligeledes $\angle \Gamma$ *γωνία ἐν τμήματι*, ikke *τοῦ τμήματος* (Euklid III def. 8 *ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥ ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν*). Hvad *γωνία τοῦ τμήματος* (og altsaa ogsaa *γ. τοῦ ἡμικυκλίου*) er, lære vi derimod af Euklid III def. 7: *τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.* Naar man fastholder denne Definition, bliver det af Aristoteles antydede Bevis, uden at man behøver at forandre det mindste i den overleverede Text, følgende:

Cirklen tegnes som ovenfor; da er $\angle A$ (eller E) $+ \Gamma$, $\angle B$ (eller Z) $+ \Delta$ *γωνίαι τοῦ ἡμικυκλίου* og $\angle \Gamma$, $\angle \Delta$ *γωνίαι τοῦ τμήματος*. Altsaa



$$\angle A + \Gamma = \angle B + \Delta$$
$$\angle \Gamma = \angle \Delta$$
$$\overline{}$$
$$\angle E = \angle Z,$$

naar man anvender de to af Aristoteles anførte Sætninger *αἱ τῶν ἡμικυκλίων γωνίαι ἴσαι εἰσίν* og *αἱ τοῦ τμήματος γωνίαι ἴσαι εἰσίν*, samt Axiomet *ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσων ἀφαιρουμένων ἴσα λείπεται.*

Netop denne Forklaring er det, Julius Pacius giver (In Aristotelis Organon Commentar. 1605 p. 156 f.); kun forandrer han for Tydeligheds Skyld lidt ved Bogstaverne paa Figuren (som ikke findes hos Aristoteles). Det er ganske klart, at ogsaa de antike Commentatorer, hvis Bemærkninger Waitz p. 434 kalder «confusae», har havt denne Opfattelse; men hos Alexander Aphrodisiensis er Texten noget forskrevet, og hos Johannes Philoponos, som Waitz p. 435 med Urette anfører til Støtte for sin Opfattelse, er Figuren i Udgaven forvansket derved, at Bogstaverne *A* og *B* staa ved det andet Endepunkt af de respektive Diametre (forøvrigt er det den samme Figur som Nr. 2 ovenfor; hos Alexander er der ingen Figur i Udgaven, men hans Text kan bringes i Overensstemmelse med den samme, blot at han sætter *E* ved Centrum og udelader de i Virkeligheden overflødige Bogstaver *E* og *Z*). De to Steder lyde saaledes:

Alexander Aphrodis. in Anal. pr. Venet. 1513 fol. 89ᵛ: *τὸ μὲν πρόβλημα δεῖξαι τὰς πρὸς τῇ βάσει τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου δύο γωνίας ἴσας ἀλλήλαις, ὁ Εὐκλείδης μὲν ἐν τῷ πρώτῳ τῶν στοιχείων δέδειχε διὰ τοῦ ε′ θεωρήματος* [I, 5] *δείξει χρησάμενος ἄλλῃ* [ved Trekanters Congruens]*· ὁ μέντοι Ἀριστοτέλης ἄλλως δείκνυσιν αὐτό, καί ἐστιν ἡ δεῖξις τοιαύτη· ἔστω κύκλος ὁ αβγδ* [en uheldig Maade at betegne Cirklen paa], *καὶ ἔστω κέντρον αὐτοῦ τὸ ε, καὶ διήχθωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας ἥ τε αε καὶ ἡ βε διάμετροι δηλονότι οὖσαι τοῦ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ· βάσις δὴ ἔσται ἡ αβ τοῦ εαβ τριγώνου. ἔσονται δὴ πρὸς τῇ βάσει αὐτοῦ γωνίαι ἥ τε αγ* (læs *α*) *καὶ ἡ βδ* (læs *β*). *ἐπεὶ οὖν ἡμικυκλίου ἐστὶν ἑκατέρα τῶν αβ, γδ* (læs *αγ, βδ*) *γωνιῶν, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· αἱ γὰρ τῶν ἴσων ἡμικυκλίων γωνίαι ἴσαι τῷ* *ἐφαρμόζειν ἀλλήλαις· ὧν αἱ ὑπὸ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου καὶ τῆς περιφερείας ἀπολαμβανόμεναι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, ἐπεί εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι* [unøjagtig Sprogbrug]· *αἱ γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι* [ligeledes] *ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, ὅτι καὶ καθόλου αἱ τῶν ἴσων τμημάτων γωνίαι* [Anvendelsen af den rigtige Sprogbrug her fjerner al Tvivl om Forf.'s Opfattelse] *ἴσαι. λοιπὸν ἄρα αἱ πρὸς τῇ βάσει αἱ ἀπολαμβανόμεναι ὑπό τε τῆς βάσεως καὶ ἑκατέρας τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· ἂν γὰρ ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, καὶ τὰ λειπόμενα ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις. καί εἰσιν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις· ἀπὸ γὰρ τοῦ κέντρου εἰσὶν ἀμφότεραι* [disse Tilføjelser ere ganske overflødige og røbe en vis Uklarhed]. *τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις.*

De foretagne Rettelser ere nødvendige, da Textens Bogstaver ikke lade sig forlige med nogensomhelst Figur; Fejlene hidrøre vistnok fra en eller anden Misforstaaelse af det mathematiske Indhold enten hos en Afskriver eller maaske først hos Udgiveren. De gaa ogsaa igjen i det følgende (fol. 89^{v} Lin. 30 *τὴν αβ γωνίαν τῇ βδ ἴσην*, læs *τὴν αγ γωνίαν τῇ βδ ἴσην*, Lin. 46 *ὡς εἶναι τὰς μὲν ὅλας γωνίας τὰς τῶν ἡμικυκλίων τὰς αβ, γδ*, læs *τὰς αγ, βδ*). Vinklerne *γ*, *δ* betegnes gjentagne Gange som *αἱ τοῦ τμήματος γωνίαι* (fol. 89^{v} Lin. 34—35, fol. 90 Lin. 1), og Vinklerne ved Grundlinien benævnes med Aristoteles *ε*, *ζ* (fol. 89^{v} Lin. 43, fol. 90 Lin. 2), saa at der ikke kan være Tvivl om Forstaaelsen i det hele, medens det maa indrømmes, at Alexander har udtrykt sig med liden Klarhed og Skarphed i det enkelte.

Langt klarere og concisere er Philoponos' Bemærkning til Stedet fol. LXII^{v} ff. (ed. Venet. 1536):

ὅταν γὰρ ὁ γεωμέτρης βούληται δεῖξαι, ὅτι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἴσαι εἰσὶν αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἐπειδὴ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον γίνεται διὰ τῶν ἀγομένων διὰ τοῦ κέντρου εὐθειῶν γινομένης τῆς βάσεως δι' ἑτέρας εὐθείας ἀποτεμνούσης τμῆμά τι τοῦ κύκλου, συλλογίζεται οὕτως· ἐπειδὴ παντὸς ἡμικυκλίου αἱ γωνίαι ἴσαι, ἡμικυκλίου δὲ γωνίαι ἡ (læs αἱ) αγ, βδ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· λαμβάνομεν γὰρ ἐνταῦθα οὐ τοῦ ἰσοσκελοῦς τὰς γωνίας, ἀλλὰ τῶν ἡμικυκλίων τῶν τεμνομένων διὰ τῶν α, β εὐθειῶν τῶν ἠγμένων διὰ τοῦ κέντρου. ἔχει οὖν τέως [?], ὅτι τοῦ ἡμικυκλίου ἴσαι εἰσὶν αἱ γωνίαι. ἐπειδὴ [læs ἐπεὶ δὲ] ἡ βάσις τοῦ τριγώνου τμῆμά τι τοῦ κύκλου ἀποτέμνει, παντὸς δὲ τμήματος κύκλου ἴσαι εἰσὶν αἱ γωνίαι, ἴσαι ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ γ, δ τοῦ τμήματος γωνίαι. οὐκοῦν ἴση μὲν ἡ αγ τῇ βδ γωνίᾳ, τουτέστι τοῦ ἡμικυκλίου· ἴσαι δὲ καὶ αἱ τοῦ τμήματος ἡ γ καὶ ἡ δ. ἐὰν δὲ ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφέλῃς, τὰ καταλειπόμενα ἴσα γίνεται· ἀφαιρεθεῖσαι ἄρα ἐκ τῶν αγ καὶ αδ [læs βδ] γωνιῶν ἴσων οὐσῶν αἱ γ καὶ δ ἴσαι οὖσαι τὰ καταλειφθέντα ἴσα ἐποίησαν, λέγω δὴ τὴν ε καὶ τὴν ζ γωνίαν, αἵπερ εἰσὶ τοῦ ἰσοπλεύρου γωνίαι.

Indholdet af Stedet hos Aristoteles er saaledes ganske klart, og heller ikke Formen volder nogen Vanskelighed. Mærkeligt er kun Udtrykket *αἱ A, B* om Diametrene, som forøvrigt kommer igjen baade hos Philoponos (se ovfr.) og hos Alexander (fol. 89[v] Lin. 38 *ὑπὸ τῶν α, β διαμέτρων*). Det kan imidlertid sammenstilles med et hos Euklid oftere forekommende Udtryk, hvor en Radius betegnes alene ved sit Endepunkt i Peripherien (*διαστήματι ἑνὶ τῶν E, Z, H,* se min Udg. af Euklids Elementer I p. 281 not.).

Af den Maade, hvorpaa Aristoteles antyder det her reconstruerede Bevis, fremgaar det tydeligt, at det ikke er hans egen Opfindelse, men det paa hans Tid gængse Bevis i de mathematiske Lærebøger. Heraf slutte vi dels, at vor Forudsætning er rigtig, at Euklid med Hensyn til Udtrykkene *γωνία ἐν τμήματι* og *γωνία τμήματος* har bevaret sine Forgængeres Sprogbrug, dels at de saakaldte blandede Vinkler var behandlede allerede i de føreuklidiske Lærebøger, saa at der næppe er Grund til at betvivle Ægtheden af de Steder, hvor de omtales af Euklid (se min Udg. af Elementerne V p. LXXXVIII). De ældre Lærebøger maa have indeholdt mere om dem end Euklid; til vort Bevis kræves saaledes de to Sætninger: de blandede Vinkler i Halvcirkler ere ligestore, og: de blandede Vinkler i et Cirkelsegment ere ligestore. Ingen af dem findes i Elementerne, den første anvendes derimod oftere i Katoptriken (prop. 5, 24). Endelig tør maaske Aristoteles' Benyttelse af Axiomet (= Elem. I κοιν. ἐνν. 3) anføres som Bevis for, at allerede Euklids Forgængere stillede saadanne i Spidsen for Systemet, saa at der er saa meget mindre Grund til at tvivle om Ægtheden af de euklidiske (Eucl. op. V p. LXXXIX).

Da saaledes dette Sted af Aristoteles kaster noget Lys over de føreuklidiske Lærebøger, har jeg ment, at det var af nogen Interesse at fremsætte den rigtige Fortolkning deraf, uagtet det ikke, som jeg først troede, er noget nyt, men kun en Fremdragen af noget endog meget gammelt, der med Urette er sat tilside.